

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Аномалии в анизотропии реликтового излучения

Работу выполнил:
студент 2-го курса, 210 гр
Грибов Владислав Максимович
Научный руководитель:
член-корр. РАН
доктор физ. - мат. наук
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва, 2024

Содержание

1 Введение	2
2 Реликтовое излучение	2
2.1 Природа происхождения	2
2.2 Анизотропия	2
3 Аномалии реликтового излучения	5
3.1 Отсутствие корреляции	6
3.2 Сонаправленность квадруполь и октополь	7
3.3 Полусферическая асимметрия	8
3.4 Асимметрия чётности	9
4 Анализ данных Planck	10
5 Вывод	13
Список литературы	14

1 Введение

В настоящее время аномалии реликтового излучения и физика, стоящая за ними, является загадкой и большой преградой к описанию нашей Вселенной и построения точной модели. Благодаря миссиям COBE, WMAP и Planck и данным, полученным за время их работы, были рассчитаны константы модели Λ CDM. Изучение свойств реликтового излучения позволит узнать больше о ранней Вселенной, эволюции галактик и космических структур. Нельзя отрицать, что и аномалии CMB (Cosmic Microwave Background) тоже могут содержать в себе много информации, которая может даже и опровергнуть принятые ныне модели и идеи.

2 Реликтовое излучение

2.1 Природа происхождения

По теории Большого взрыва, ранняя Вселенная представляла собой горячую плазму, состоящую из электронов, барионов и постоянно излучавшихся, поглощавшихся и переизлучавшихся фотонов. Сталкиваясь и обмениваясь энергией с частицами плазмы, фотоны постоянно взаимодействовали с ними. Излучение находилось в состоянии теплового равновесия с веществом, и его спектр соответствовал спектру абсолютно чёрного тела.

По мере расширения Вселенной космологическое красное смещение вызывало остывание плазмы, и на определённой стадии замедлившиеся электроны получили возможность соединяться с замедлившимися протонами и альфа-частицами, образуя атомы. Это случилось спустя примерно 380 000 лет после Большого Взрыва при температуре около 3000 К. Из-за того, что свободного пространства между частицами стало больше, а заряженных частиц стало меньше, фотоны перестали настолько часто рассеиваться и могли свободно перемещаться в пространстве, почти не взаимодействуя с веществом. То есть Вселенная становится практически прозрачной для фотонов первичной плазмы. Они сохранились во Вселенной до сих пор и как раз наблюдаются в виде реликтового излучения. Эти фотоны избежали рассеяния и до сих пор достигают Земли через пространство продолжающей расширяться Вселенной. Наблюдаемая сфера, соответствующая данному моменту, называется поверхностью последнего рассеяния. Она является самым удалённым объектом, который можно наблюдать в электромагнитном спектре.

На распространение реликтовых фотонов после рекомбинации влияло расширение Вселенной и те процессы, которые связаны с образованием структур. Отсюда можно заключить, что реликтовое излучение содержит ценную информацию также о поздних этапах развития Вселенной.

2.2 Анизотропия

Распределение фотонов по энергиям имеет тепловой планковский спектр, характеризуемый температурой:

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001K$$

Данное утверждение было получено из анализа результатов множества наблюдений реликтового излучения на разных частотах.

Температура фотонов, приходящих с разных направлений на небесной сфере, одинакова на уровне 10^{-4} . Однако, импирически установили, что данная температура всё-таки зависит от направления на небесной сфере. Это и есть угловая анизотропия реликтового излучения. Она на сегодняшний день хорошо изучена, измерена и составляет примерно величину порядка $\delta T/T_0 \sim 10^{-4} - 10^{-5}$

Наибольшее изменение температуры $\delta T/T_0 \sim 10^{-3}$ имеет дипольный характер и объясняется движением Солнечной системы в направлении созвездия Гидры, причём скорость этого движения позволяет вычислить дипольную компоненту анизотропии реликтового излучения

$$\delta T_{\text{диполь}} = 3,346\text{мК}$$

Так как температура СМВ T зависит от положения на небесной сфере \bar{e}

$$T(\bar{e}) = \delta T_0(\bar{e})/T_0 = (T_0(\bar{e}) - T_0)/T_0$$

, где \bar{e} – единичный вектор, описывающий положение на небе, то удобно будет воспользоваться разложением по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\bar{e})$, которые образуют полный набор базисных функций на сфере. Тогда относительная флуктуация равна:

$$\delta T_0(\bar{e})/T_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\bar{e})$$

причём коэффициенты разложения a_{lm} удовлетворяют условию

$$a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m}$$

которое следует из вещественности температуры и соотношения $Y_{l,m}^* = (-1)^m Y_{l,-m}$. И из ортонормированности системы сферических гармоник имеем интегральное представление для коэффициентов a_{lm} :

$$a_{l,m} = \int d\bar{e} \frac{\delta T_0(\bar{e})}{T_0} Y_{lm}^*(\bar{e})$$

(интегрируем по сфере единичного радиуса)

При анализе используются как раз эти коэффициенты. Мы экспериментально находим значения $\delta T(\bar{e})$ и при помощи формулы выше находим коэффициенты a_{lm} . Из асимптотической формулы для сферических гармоник

$$Y_{lm}(\Theta, \psi) = \frac{1}{\pi \sqrt{\sin(\Theta)}} \cos[(l + \frac{1}{2})\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}] e^{im\psi} + O(\frac{1}{l})$$

справедливой при $l \gg 1$ и $l \gg m$, получаем, что гармоники Y_{lm} отвечают угловым масштабам $\sim \pi/l$. Таким образом, величина a_{lm} характеризует амплитуду флуктуаций углового размера $\sim \pi/l$ [1]

Для статистически изотропного неба гармонические коэффициенты ортогональны (т.е. нескоррелированы). Это утверждение относится к гипотетическому случаю, когда мы усредняем результаты измерения флуктуаций температуры по большому количеству вселенных, совпадающей с

нашей по всем космологическим параметрам. Можно сказать, по ансамблю вселенных. Для такого ансамбля будет выполняться соотношение:

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle \propto \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

причём соответствующий коэффициент пропорциональности должен определяться только величиной углового момента l , но не его проекций m , т.е.

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

Данные коэффициенты C_l полностью определяют свойства анизотропии реликтового излучения.

Конечно же, Вселенная у нас одна, единственная и неповторимая. Пусть мысленно мы можем представить себе множества похожих на нашу Вселенных, всё равно мы имеем дело лишь с одним набором экспериментальных данных, заключенных в коэффициентах a_{lm} . Поэтому последнюю формулу мы проверить на достоверность не можем. Но для старших мультиполей с большим количеством гармоник с разными проекциями $m = -l, \dots, l$, можно посмотреть, насколько статистические свойства имеющегося набора a_{lm} согласуются с формулой и гауссовым характером флуктуаций температуры. В настоящее время они хорошо согласуются.

Усреднив по m квадраты модулей измеренных коэффициентов a_{lm} , мы получим приближенно набор коэффициентов C_l :

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} |a_{lm}|^2$$

Из данного определения и того факта, что средние от величин a_{lm} равны нулю, имеем формулу для вариации коэффициентов C_l :

$$(\delta C_l)^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1}$$

Тогда относительная статистическая погрешность будет равна $1/\sqrt{1+l/2}$. Таким образом, мы получаем коэффициенты, которые в предположении о гауссовости флуктуаций температуры, содержат в себе всю информацию о физике анизотропии реликтового излучения. Получаемые предсказания могут отличаться от экспериментальных данных на величину относительной статистической погрешности. Это не будет говорить о несостоятельности теории. От этой космической дисперсии невозможно избавиться. Она не позволяет нам фиксировать численные значения различных космических параметров со сколь угодно высокой точностью. Эта нижняя граница ошибки в измерениях углового спектра мощности обусловлена тем, что мы наблюдаем флуктуации только в одной Вселенной.

Коэффициенты C_l определяют двухточечную корреляционную функцию флуктуаций температуры. При гауссовых флуктуациях через эту функцию выражаются все остальные корреляционные функции:

$$\begin{aligned} C(\Theta) &= \langle T(\bar{e}_1) T(\bar{e}_2) \rangle = \sum_l C_l \sum_m Y_{lm}(\bar{e}_1) Y_{lm}^*(\bar{e}_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\bar{e}_1 \bar{e}_2) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos(\Theta)), \end{aligned}$$

где $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \cos(\Theta)$ и $P_l(\bar{e}_1 \bar{e}_2)$ – полиномы Лежандра.

Для дисперсии флуктуаций температуры получаем

$$\langle \delta T_0^2(\bar{e}) \rangle = T_0^2 \cdot \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx T_0^2 \cdot \int d \ln l \cdot \frac{(l+1)l}{2\pi} C_l,$$

причём последнее равенство справедливо для больших l . Следовательно, величина

$$D_l = T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$$

определяет квадрат амплитуды флуктуаций на логарифмическом интервале гармоник. Как раз её и изображают на графиках. [2]

3 Аномалии реликтового излучения

Теперь мы обсудим аномальные особенности, которые были замечены в СМВ. Группа исследователей "Планка" провела несколько тестов для проверки статистической изотропии СМВ. По факту, СМВ хранит в себе информацию о возмущениях плотности в момент декаплинга в ранней Вселенной (это период в развитии Вселенной, когда различные типы частиц выходят из теплового равновесия друг с другом). Следовательно, отклонения от изотропии в сфере СМВ будут сигнализировать об отклонении от статистической однородности или изотропии в ранней Вселенной.

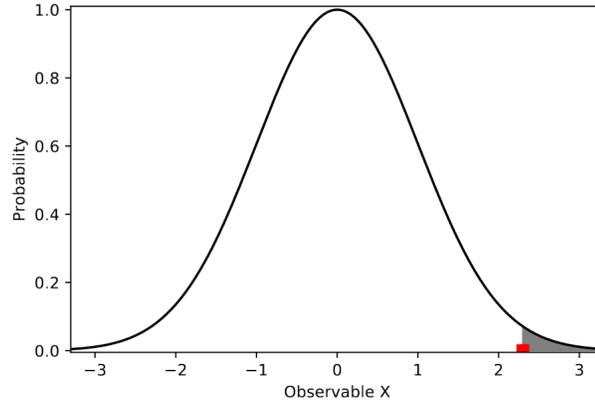


Рис. 1: Концепция р-значения. На рисунке чёрным цветом показано распределение вероятностей некоторой наблюдаемой X согласно нулевой гипотезе. Наблюдаемое значение X показано красным. Заштрихованная область дает нам р-значение наблюдаемого значения X . Как видно из рисунка, меньшее р-значение подразумевает большее отклонение от нулевой гипотезы. [4]

Поскольку предсказания модели Λ CDM являются статистическими, ключевым аспектом анализа является количественная оценка статистической значимости любого наблюдаемого отклонения от теории. В статистической терминологии это известно как проверка гипотез, при которой нулевая гипотеза, которой в данном случае является Λ CDM-модель, сравнивается с наблюдениями. Отклонение от нулевой гипотезы часто оценивается в терминах так называемого р-значения. Учитывая

нулевую гипотезу, p -значение - это вероятность того, что определенное явление может произойти, что оно выбивается из общей картины, является слишком экстремальным по сравнению с нулевой гипотезой. Если p -значение наблюдаемого признака равно нулю, то нулевая гипотеза автоматически считается неверной.

Feature	p -value	Data
In angular space		
low variance ($N_{\text{side}} = 16$)	$\leq 0.5\%$	Planck 15
2-pt correlation $\chi^2(\theta > 60^\circ)$	$\leq 3.2\%$	Planck 15
2-pt correlation $S_{1/2}$	$\leq 0.5\%$	Planck 15
2-pt correlation $S_{1/2}$	$\leq 0.3\%$	Planck 13 and WMAP 9 yr
2-pt correlation $S_{1/2}$ (larger masks)	$\leq 0.1\%$	Planck 13
	$\leq 0.1\%$	WMAP 9 yr
Hemispherical variance asymmetry	$\leq 0.1\%$	Planck 15
Cold spot	$\leq 1.0\%$	Planck 15
In harmonic space		
Quadrupole–octopole alignment	$\leq 0.5\%$	Planck 13
$\ell = 1, 2, 3$ alignment	$\leq 0.2\%$	Planck 13
Odd parity preference $\ell_{\text{max}} = 28$	$\leq 0.3\%$	Planck 15
Odd parity preference $\ell_{\text{max}} < 50$ (LEE)	$\leq 2\%$	Planck 15
Dipolar modulation for $\ell = 2-67$	$\leq 1\%$	Planck 15

Рис. 2: Известные аномалии и соответствующие им p -значения. В своей статье Глен Старкман назвал отсутствие корреляции, полусферическую асимметрию и выравнивание низких мультиполей "тремя атомами" аномалий реликтового излучения. По его мнению, поняв физику хотя бы двух из аномалий, мы сможем понять смысл и третьей. К тому же, такое название он дал, так как, как он считает, все три "атома" независимы друг от друга, и должны иметь своё уникальное объяснение. [3]

Для количественной оценки аномалии первым шагом является выбор интересующей наблюдаемой величины, которая будет служить индикатором аномалии. Вместо того, чтобы аналитически выводить распределение вероятностей выбранной наблюдаемой величины из теории (задача, которая может быть очень трудной), на практике часто удобнее оценить значение p численно. Это делается путем моделирования большого числа случайных реализаций карты температуры СМВ из вероятностного распределения модели Λ CDM с использованием наилучшей подгонки для свободных параметров и вычисления p -значения выбранной наблюдаемой величины из них. Именно таким образом коллаборация "Планка" оценила p -значение аномалий, обсуждаемых ниже.

3.1 Отсутствие корреляции

Данные спутников COBE (1996), WMAP (2003) и Planck (2019) постоянно обнаруживают отсутствие двухточечных корреляций при низких мультиполях или на больших угловых масштабах, по сравнению с тем, что ожидается в модели Λ CDM. Визуально это отсутствие корреляций проявляется в двухточечной корреляционной функции $C(\Theta)$. Для углов больше 60° двухточечная функция удивительно мала и близка к нулю. Команда WMAP придумала подходящую наблюдаемую величину

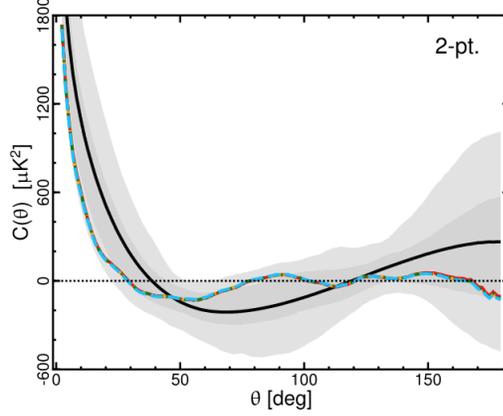


Рис. 3: Угловая двухточечная корреляционная функция, рассчитанная Планком. Разноцветная кривая показывает расчёт спутника. Чёрная сплошная показывает расчёт по модели Λ CDM. Тёмно-серая область – ожидание 68 %. Серая область – ожидание 95 %. [3]

для количественной оценки этого недостатка мощности:

$$S_{1/2} = \int_{-1}^{1/2} C(\Theta)^2 d(\cos(\Theta))$$

Его физический смысл очевиден: он фиксирует общую сумму квадратов корреляций при углах $\Theta > 60^\circ$. Λ CDM модель предсказывает значение $42000 \mu K^4$, в то время как Планк выдаёт измеренное значение $1290,2 \mu K^4$, что соответствует значению p меньше 1 процента. Получается, что, если бы мы могли наблюдать за тысячей вселенных, подчиняющихся модели Λ CDM, только пара штук из них содержала бы столь малое значение $S_{1/2}$

3.2 Сонаправленность квадруполя и октополя

Для осознания данной аномалии нужно ввести мультипольные векторы Максвелла. Они обеспечивают альтернативу сферическим гармоникам, представляют собой мультипольные моменты произведениями единичных векторов. Диполь — это вектор. Квадруполь можно построить из произведения двух диполей (двух векторов), октополя из трех диполей (трех векторов) и так далее для произвольного мультипольного момента l . Конечно, два диполя создают как квадрупольный, так и монопольный моменты, поэтому только определенные комбинации произведений диполей дадут чистый квадруполь. В конце концов, это означает, что угловой момент l объекта может быть представлен l единичными векторами и общей амплитудой.

Оказалось удобным непосредственно изучать не мультипольные векторы, а их ориентированные области [3, 5, 10]:

$$\vec{w}^{(l;i;j)} = \vec{v}^{(l;i)} \times \vec{v}^{(l;j)}$$

Важно, что это не единичные векторы. Их величины представляют собой площадь параллелограмма, созданного двумя векторами. Уже эти векторы ориентированной площади затем можно сравнить с мультиполями или с фиксированными направлениями.

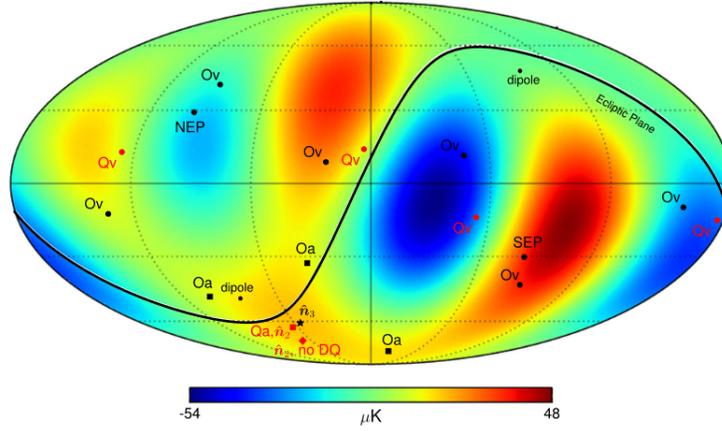


Рис. 4: Комбинированная квадрупольно-октопольная карта из выпуска Planck 2013. Показаны мультипольные векторы (v) квадруполя (красный) и октополя (черный), а также соответствующие им ориентированные площади (a). [3]

Самый последний анализ последних выпусков данных WMAP и Planck показывает, что квадруполь и октополь аномально выровнены друг с другом, при этом значения r варьируются примерно от 0,2 до 2 % в зависимости от используемой карты. Также обнаружено, что квадруполь и октополь совместно перпендикулярны плоскости эклиптики (т.е. их векторы площадей почти ортогональны нормали к эклиптике) со значением r 2–4% и полюсу Галактики с r -значением 0,8–1,6%. Еще более поразительно то, что они совпадают с направлением диполя со значением r 0,09–0,37%.

3.3 Полусферическая асимметрия

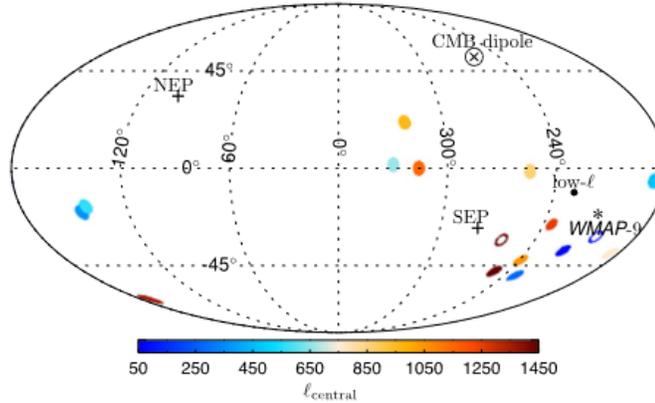


Рис. 5: Полусферическая асимметрия. [3]

Из данных Планка и WMAP было обнаружено, что мощность в дисках на небе радиусом $\sim 10^\circ$ – 20° , оцененная в нескольких мультипольных бинах, в одном полушарии неба больше, чем в другом. Это означает, что, выбирая определённый промежуток мультиполей, мы найдем вблизи Южного полюса эклиптики область с мощностью много большей, чем у такой же области, зеркально

отражённой на Северное полушарие эклиптических координат.

3.4 Асимметрия чётности

Наблюдения как WMAP, так и Planck обнаружили превалирование двухточечных корреляций с нечетной четностью, что отличается от предсказаний стандартной модели Λ CDM, которая предсказывает, что первичные возмущения, генерируемые в нашей Вселенной, нейтральны по четности. Четность первичных возмущений можно изучить, анализируя мультиполи в диапазоне $[2, 50]$, известном как плато Сакса-Вольфа. Этот диапазон мультиполей соответствует длинноволновым возмущениям, которые появились на горизонте в недавнем прошлом и, следовательно, были относительно немодифицированы физикой позднего времени. Асимметрию чётности можно определить количественно с помощью формулы:

$$R^{TT}(l_{max}) = \frac{D_+(l_{max})}{D_-(l_{max})}$$

, где $D_{\pm}(l_{max})$ количественно равен суммарной мощности, содержащейся в чётных (+) и нечётных (-) мультиполях. Выражение для этих величин выглядит так:

$$D_{\pm}(l_{max}) = \frac{1}{l_{total}^{\pm}} \sum_{2, l_{max}}^{\pm} \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$$

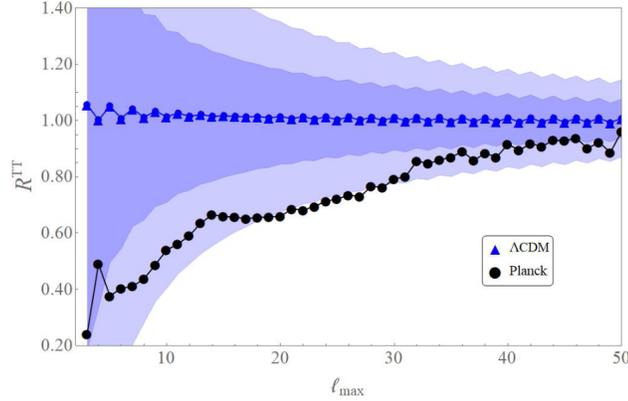


Рис. 6: Данные СМВ в мультипольном диапазоне $[2, 50]$ показывают явное превалирование нечетной четности по сравнению с нейтральной четностью, т.е. $R^{TT}(l_{max}) = 1$, как предсказано стандартной моделью. [4]

В настоящее время неясно, является ли наблюдаемая асимметрия четности случайностью, независимой аномалией или побочным продуктом другой аномалии. На данных WMAP за 7 лет было показано, что направления максимальной (минимальной) асимметрии четности для мультипольных моментов до $l \sim 20$, и исключая $m = 0$ из анализа кажутся нормальными (параллельными) направлению, выделенному диполем реликтового излучения. Направление, которое максимизирует эту асимметрию четности, также близко к направлению полусферической асимметрии с учетом наименьших мультипольных моментов. Таким образом, асимметрия четности и асимметрия полушарий могут быть связаны друг с другом.

4 Анализ данных Planck

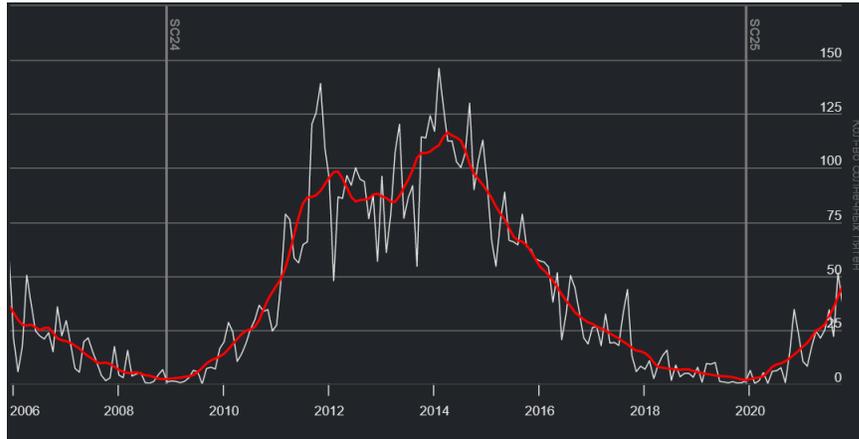


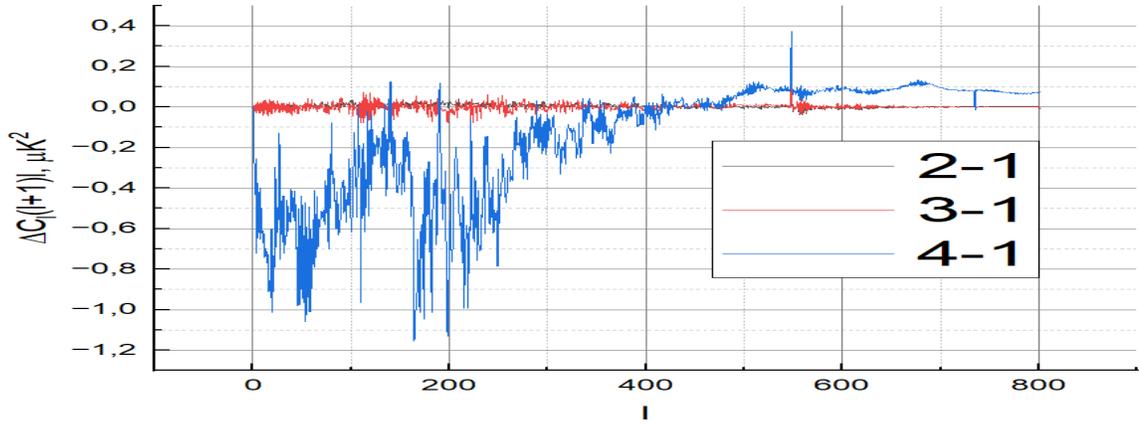
Рис. 7: Солнечная активность в начале своего 24-го цикла. Красная прямая показывает количество солнечных пятен за последние 13 месяцев, в то время как белая показывает количество за последний месяц. Ориентируясь по красной линии, можно говорить, что активности в 2012 и в 2013 примерно равны. [6]

Данные для анализа аномалий анизотропии реликтового излучения и их зависимости от солнечной активности брались из открытого архива спутника Planck. [7,8] На сайте выложены полученные значения в разных видах: переработанные и непереработанные в температуру полученные сигналы, массивы значений напряжения на регистраторах с характерным временем измерения и карты. Нас интересуют карты. Существует библиотека Python для обработки карт и данных в формате .FITS. FITS (Flexible Image Transport System) в отличие от других форматов изображений разработан специально для научных данных и поэтому включает в себя метаданные, описывающие информацию о фотометрической и пространственной калибровке, вместе с метаданными исходного изображения. Упомянутая выше библиотека называется HEALPIX. [9] С её помощью можно анализировать файлы формата FITS и, используя прочие возможности Python, рассчитывать значения коэффициентов C_l . При помощи полученных данных были построены графики зависимости $C_l(l+1)l$ от значения мультиполя l . Брались карты для трёх разных детекторов Planck: 30, 44, 70 ГГц. В архиве Planck находятся данные по годам его работы: 2009 – 2013. Для каждого отдельного детектора были вычислены разности значений величины $C_l(l+1)l$ между 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4 годами. Каждому году соответствует своя солнечная активность (Рис.7)

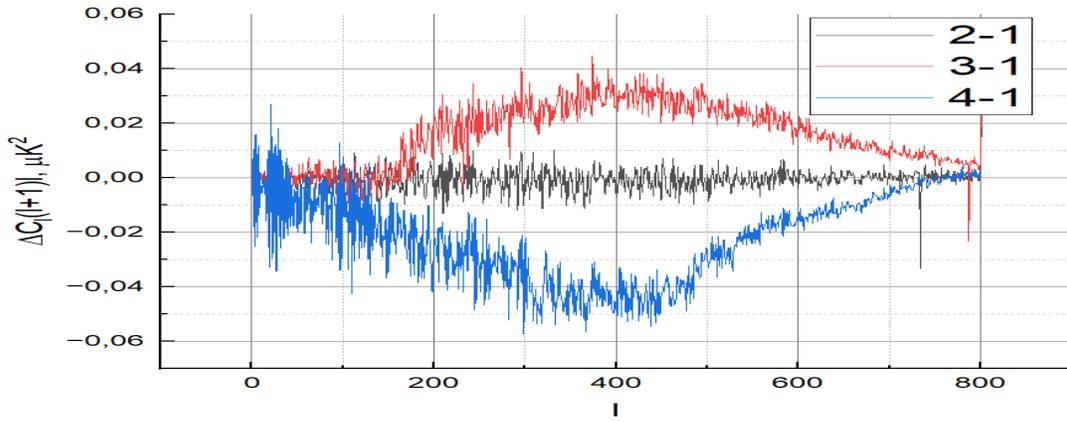
Как видно, минимум приходился на начало работы спутника. С каждым годом активность возрастала и достигла своего пика в 2012-2013 годах. Можно сказать, что в последние два года активность была примерно одинаковой. Значит, сравнивая значения $C_l(l+1)l$ при разных мультиполях в года с разной солнечной активностью, мы сможем найти зависимость между отклонениями или закономерностями аномалий реликтового излучения от действий на поверхности нашей звезды.

На графиках на странице 11 видна зависимость разностей показателей $C_l(l+1)l$ при разных мультиполях между годами с неравной солнечной активностью для каждого из детекторов.

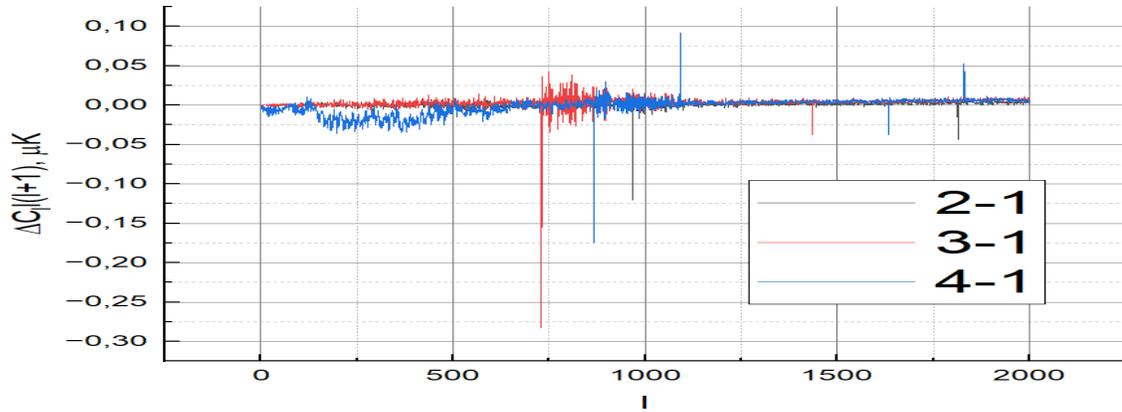
Рассмотрев ближе для 30 ГГц 4-1, а для 44 и 70 ГГц 3-1 (на графиках на странице 12), мы заметим



(a) 30 ГГц

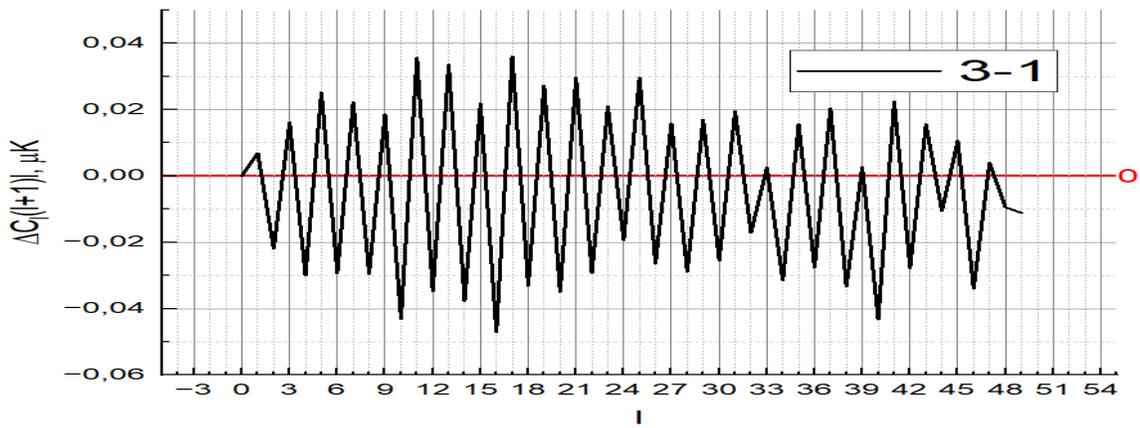


(b) 44 ГГц

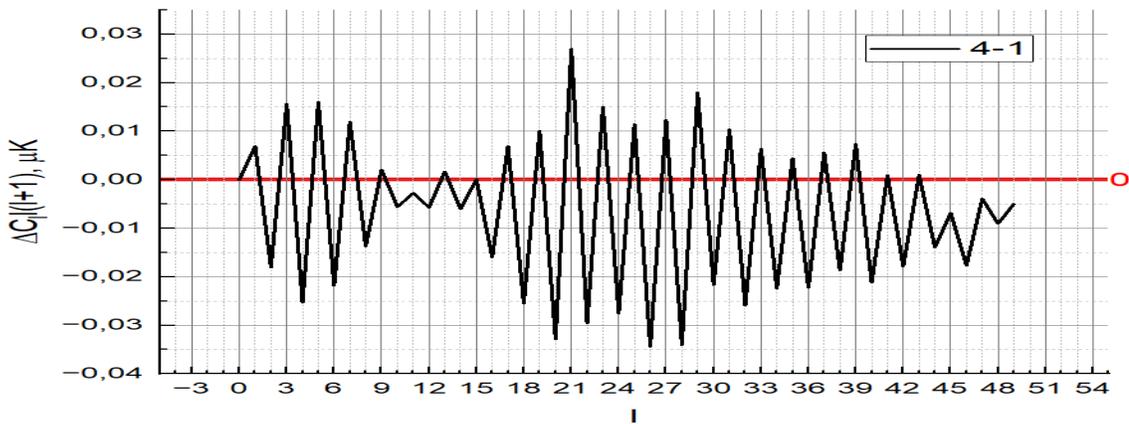


(c) 70 ГГц

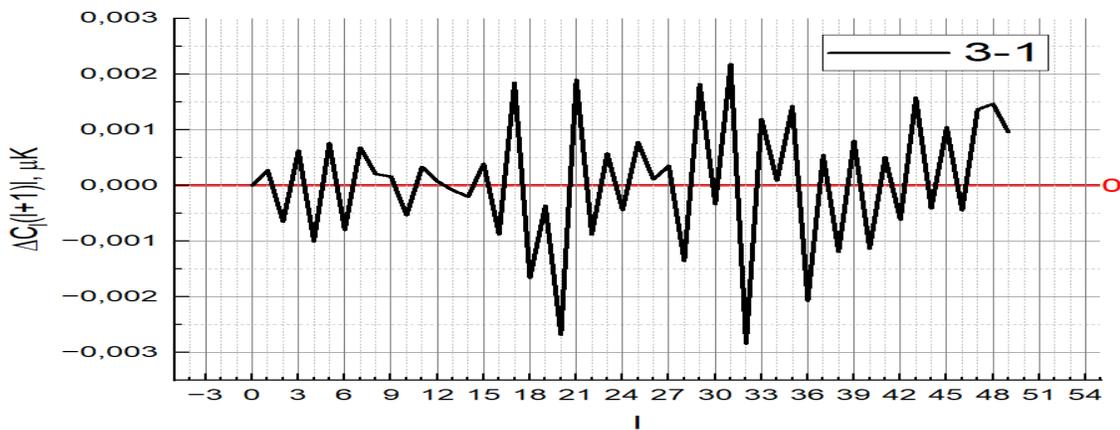
Рис. 8: Зависимость разностей $C_l(l+1)l$ для разных годов активности солнца. 2-1 – разность за второй и первый год; 3-1 – разность за третий и первый год; 4-1 – разность за четвёртый и первый год



(a) 30 ГГц



(b) 44 ГГц



(c) 70 ГГц

Рис. 9: Зависимость разностей $C_l(l+1)$ для мультиполей в $[2, 50]$. Чётко видна тенденция в росте разности для нечётных мультиполей и уменьшении для чётных

интересную закономерность. По отношению к нулевому значению (красная прямая) разности для нечётных мультиполей увеличиваются, а для чётных уменьшаются. Это ведёт к тому, что разность между $C_l(l+1)l$ для чётных и нечётных мультиполей в диапазоне $[2,50]$ растёт, а следовательно растёт и асимметрия чётности реликтового излучения.

Причём для годов с меньшей активностью аномалия либо мала и непродолжительна, либо и вовсе отсутствует, откуда следует, что солнечная активность может являться прямой причиной появления асимметрии чётности.

5 Вывод

В данной работе мною было изучено реликтовое излучение, методы его описания и анализа, способы его детектирования и, самое главное, его аномальные отклонения. В частности, была сопоставлена с реальными данными и проверена аномалия чётности, была показана зависимость между увеличением антисимметрии чётности и повышением солнечной активности. Нельзя точно сказать, является ли данное явление случайным отклонением или его можно назвать по-настоящему отдельной аномалией. Но группой Planck уже было выдвинуто предположение, о связи аномалии чётности с отсутствием корреляции в больших угловых масштабах и, самое интересное, с полусферической антисимметрией. Последняя аномалия непосредственно связана с Солнцем, ведь многие области повышенной мощности находятся вблизи Южного полюса эклиптики.

Список литературы

- [1] Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория – 2010. – С. 239.
- [2] Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней вселенной. Теория горячего большого взрыва – 2008. – С. 20.
- [3] CMB Anomalies after Planck Dominik J. Schwarz, Craig J. Copi, Dragan Huterer, Glenn D. Starkman - arXiv:1510.07929 - 2015.
- [4] Anomalies in the Cosmic Microwave Background and their Non-Gaussian Origin in Loop Quantum Cosmology. Ivan Agullo, Dimitrios Kranas, V. Sreenath. - arXiv:2105.12993 - 2021.
- [5] On the large-angle anomalies of the microwave sky. Craig J. Copi, Dragan Huterer, Dominik J. Schwarz and Glenn D. Starkman - 2008
- [6] "<https://www.spaceweatherlive.com/ru/solnechnaya-aktivnost/solnechnyy-cikl/istoriya-solnechnyh-ciklov.html>"
- [7] "<http://pla.esac.esa.int/pla>"
- [8] Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. Planck Collaboration. - 2016.
- [9] <https://healpix.sourceforge.io/documentation.php>
- [10] Multipole vectors: A new representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-Gaussianity at $2\bar{l} \leq 8$. Craig J. Copi, Dragan Huterer, Glenn D. Starkman - <https://public.websites.umich.edu/~huterer/Papers/vectors.pdf> - 2004.